Calidoscopis i políedres

Josep Rey Nadal
Manuel Udina Abelló

En combinar tres reflexions... s'obté un efecte summament agradable.
Sir David Brewster (1781-1841)

En les diverses exposicions que el mmaca ha anat presentant, sempre han destacat per la seva espectacularitat i la seva llum els grans calidoscopis on es poden observar amb detall els políedres regulars i molts del políedres arquimedians. En aquest article, conversarem sobre aquests mòduls, tot i que el millor lloc per parlar-ne seria en una visita en directe a l'exposició, perquè és difícil referir-se a imatges (virtuals) complexes sense poder-les veure. En tot cas, aquest text pot servir per ajudar a gaudir millor una visita a què els lectors sou tots convidats. O potser, més modestament, seria com un llibret d'instruccions per a la interacció amb aquests mòduls. Podríem parlar de miralls i políedres.

Sí, la gràcia dels miralls és que els podem fer servir per a veure políedres que només hem construït parcialment. En les figures següents es pot veure un octàedre escapçat sencer, mig, un quart i 1/8 del políedre i en tots els casos els miralls ens permeten veure'l sencer.

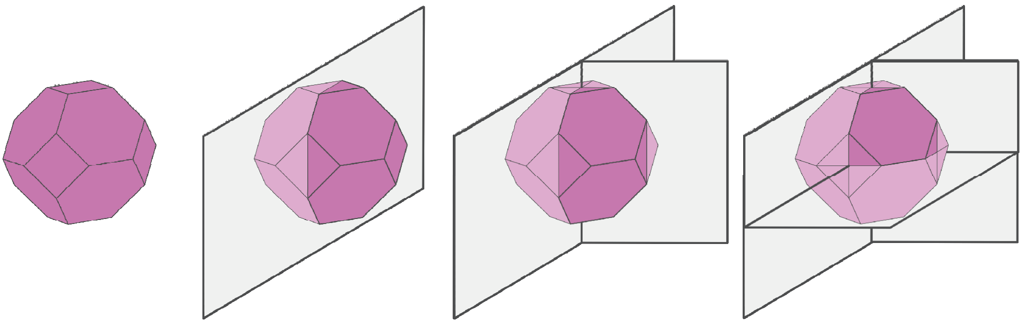


Figura 1

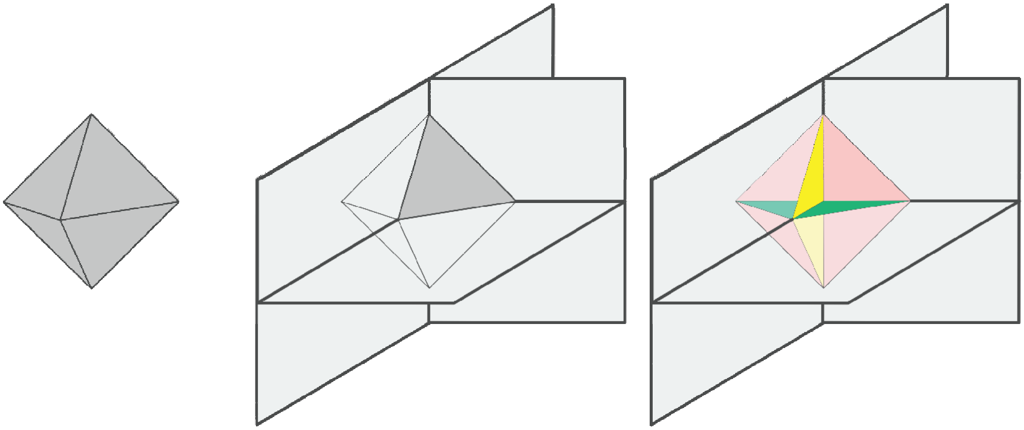


Figura 2

En aquest racó de tres miralls perpendiculars (que es pot anomenar catadiòptric), amb només un triangle ja podríem «veure» un octàedre regular.

De fet, una altra manera de generar aquest calidoscopi seria considerar a partir d'un octàedre regular la piràmide formada amb vèrtex en el centre de l'octàedre i que tingués com a base una de les cares de l'octàedre. Si les cares laterals (interiors) de la piràmide fossin miralls ja tindríem aquest calidoscopi octaèdric (que multiplica per 8).

Aquesta experiència és tota una sorpresa: es pot entendre que els miralls actuïn com a plans de simetria, però és la interacció de l'observador amb les imatges que es generen el que provoca un resultat impactant. La realització per part del mirall d'un pla de simetria ens permet reconstruir la imatge virtual d'un objecte del qual només tenim una petita part. La capacitat que tenim de poder-nos moure i veure aquesta imatge des de distints punts de vista comporta una experiència emocionant.

Calidoscopis «regulars»

Aquest calidoscopi octaèdric, el podem considerar un calidoscopi regular?

Sí, i podem fer el mateix amb la resta de políedres regulars, és a dir, considerar la piràmide amb vèrtex al centre del políedre i base una de les cares. Si les cares laterals d'aquestes piràmides són miralls obtindrem els calidoscopis que a partir d'una cara generen els diversos políedres regulars:

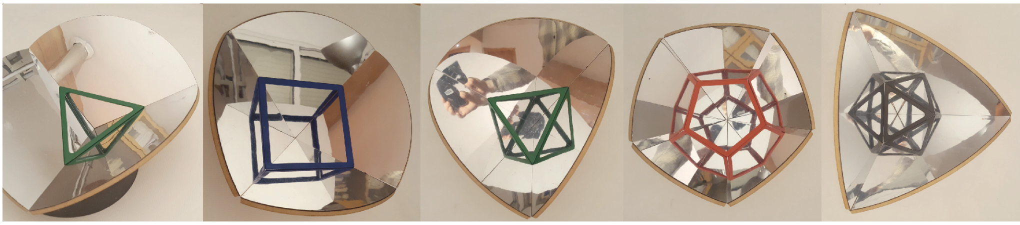
Calidoscopi tetraèdric o 1/4,

Calidoscopi cúbic o 1/6.

Calidoscopi octaèdric o 1/8.

Calidoscopi dodecaèdric o 1/12.

Calidoscopi icosaèdric o 1/20.



tetraèdric cúbic octaèdric dodecaèdric icosaèdric

Figura 3

En aquestes imatges estan representats els cinc calidoscopis regulars amb peces que s'hi han posat per poder veure'n el políedre esmentat. La diferència entre les imatges que podríem veure en viu i les que es reprodueixen en la fotografia justifica una altra vegada la visita a les exposicions del mmaca.

Però els políedres regulars tenen més plans de simetria. Per exemple, en el cas de l'octàedre, a més dels tres plans de simetria que hem comentat, en té sis més com podem veure en la figura següent (dos que passen per cada una de les tres parelles de vèrtexs oposats i són plans bisectors dels ja descrits).

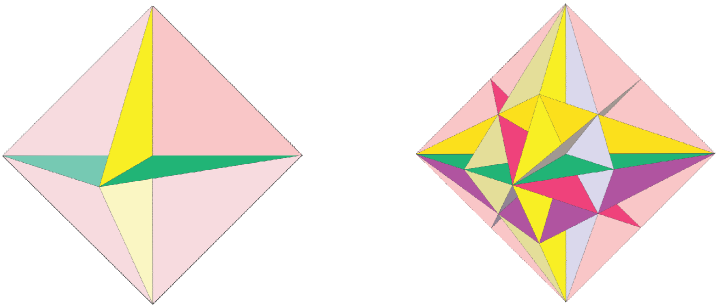


Figura 4

Veiem que els plans de simetria divideixen cada cara en sis triangles, i aquest fet el podem utilitzar per fer un calidoscopi en què podrem veure un octàedre a partir de la piràmide amb base *la sisena part d'una cara*, és a dir, 1/48 de l'octàedre.

Aquest és un calidoscopi que es pot considerar «minimal», perquè permet generar l'octàedre a partir de la sisena part d'una cara i les simetries realitzades pels miralls.

Per cada políedre regular podem considerar quin seria el seu corresponent minimal.

Calidoscopis minimals

▶ *Calidoscopi minimal tetraèdric*

En el cas del tetràedre regular, per cada cara hi passen tres plans de simetria que divideixen la cara en sis triangles. Això ens portarà a considerar el calidoscopi minimal tetraèdric 1/24.

Una piràmide amb vèrtex en el centre i amb un d'aquests sis triangles com a base i les parets laterals interiors de mirall permetrà generar el tetràedre. La cara del tetràedre és perpendicular a una de les arestes corresponent a un angle dièdric de 60°. Quan es veu per primera vegada com els miralls de les cares laterals de la piràmide generen el políedre complet és un moment que té un punt de màgic.

Els angles dièdrics de les cares laterals de la piràmide són 60°, 60° i 90°. Quan es secciona amb un pla perpendicular a una de les arestes de 60° veurem un tetràedre i quan el seccionem amb un pla perpendicular a l'aresta de 90° veurem un cub.

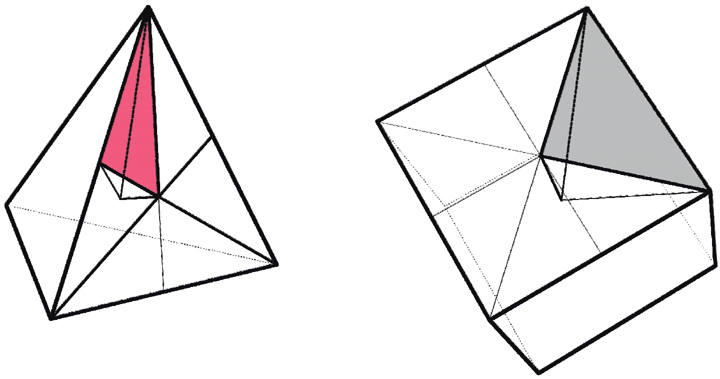


Figura 5

En aquesta figura cal fixar-se en les tres arestes que surten del centre dels políedres, que són les mateixes (però de diferent llargada) en els dos casos. S'ha ressaltat l'aresta del calidoscopi que és perpendicular a la cara del políedre en cada cas.

▶ *Calidoscopi minimal cuboctaèdric*

En el cas del cub, el minimal correspondria a la piràmide de base *un vuitè de la cara del cub* i vèrtex en el centre del cub. És a dir, seria 1/48 del cub.

De fet, el minimal del cub és igual al que ja hem comentat de l'octàedre, perquè el cub i l'octàedre tenen els mateixos plans de simetria.

Costa una mica veure que són iguals perquè en el cas del cub és una piràmide amb base un triangle que és *la vuitena part d'un quadrat*, i en el de l'octàedre la base és *la sisena part d'un triangle equilàter* i són dos triangles diferents.

El que és igual és el calidoscopi i no les piràmides: si ens fixem en les cares laterals d'aquestes piràmides veurem que els angles dièdrics entre aquestes cares són un angle recte (el díedre multiplica per 4), un angle de 60° (díedre que multiplica per 6) i un angle de 45° (díedre que multiplica per 8). En seccionar aquest calidoscopi trièdric de tres maneres diferents, amb plans perpendiculars a cada una de les arestes, els triangles que s'obtenen són, respectivament, la quarta part del rombe del dodecàedre ròmbic, la sisena part de la cara de l'octàedre i la vuitena part de la cara del cub.

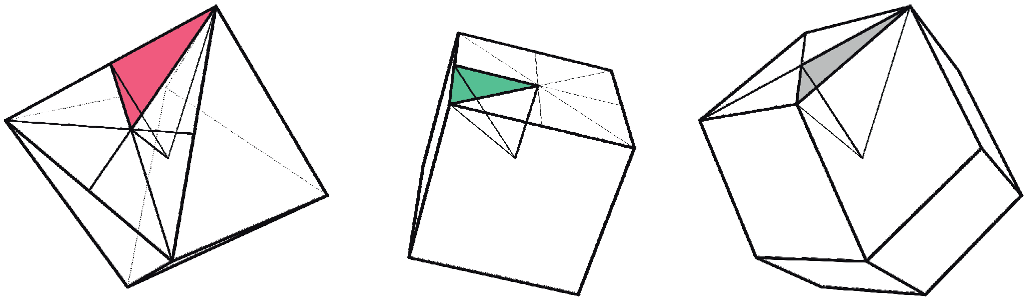


Figura 6

En aquesta figura es poden veure les tres seccions del calidoscopi. S'ha ressaltat l'aresta de la piràmide perpendicular a cada secció.

► *Calidoscopi minimal icosidodecaèdric*

I passarà el mateix amb els minimals de l'icosàedre i el dodecàedre?

Sí, perquè aquests dos políedres tenen els mateixos plans de simetria. Si partim del dodecàedre veiem que cada cara pentagonal es pot dividir en deu triangles seguint els eixos de simetria del pentàgon. La piràmide des del centre i amb base un d'aquests triangles formaria el calidoscopi minimal dodecaèdric. Els angles dièdrics d'aquesta piràmide serien de 90°, 60° i 36° (multiplicarien per 4, per 6 i per 10).

Aquest minimal coincideix amb el minimal icosaèdric pel fet que el dodecàedre i l'icosàedre són duals i tenen els mateixos plans de simetria. És un calidoscopi que «multiplica per 120» ($120 = 12 * 10 = 20 * 6$).

En fer les seccions d'aquest calidoscopi amb plans perpendiculars a cada una de les arestes obtindrem la sisena part de la cara de l'icosàedre (aresta de 60°), la desena part de la cara del dodecàedre (aresta de 36°) i la quarta part de la cara del triacontàedre ròmbic (aresta de 90°).

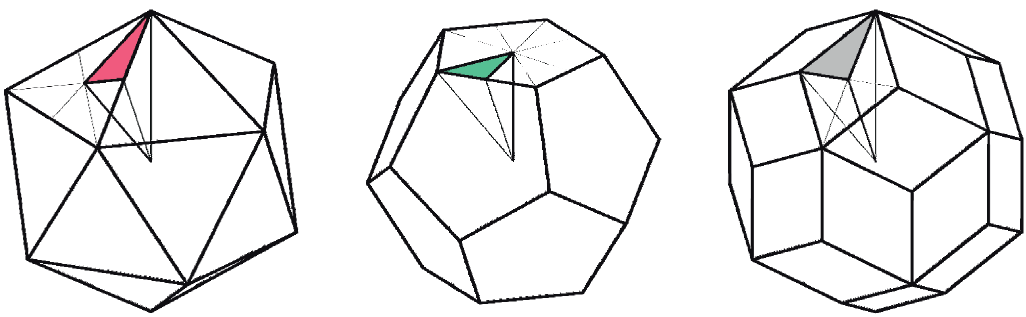


Figura 7

Calidoscopis ròmbics

El problema dels calidoscopis minimals és que són molt estrets i profunds, i no permeten una visualització òptima.

Els calidoscopis de l'exposició són «ròmbics»: obtinguts amb la «unió» de quatre calidoscopis minimals iguals (fent coincidir les arestes d'angle recte de les piràmides). Tenen l'avantatge «museístic» que és molt més fàcil de posar i de treure (i que s'aguantin bé) les peces que generaran els políedres i s'aconsegueix una millor visualització. (Les peces que s'hi posaran són simètriques en el sentit que quadruplicarien la peça que faria el mateix efecte en un calidoscopi minimal.)

Aquests calidoscopis els podem designar per l'ordre dels angles dièdrics que contenen: així, la unió de quatre minimals tetraèdrics té els quatre angles dièdrics iguals de 120ºi, per tant, que «multipliquen per 3». Diem, doncs, que és del tipus 3-3-3-3.

Calidoscopi (*)3-3-3-3. Format per la unió de quatre calidoscopis minimals tetraèdrics (1/24), per la qual cosa serà un calidoscopi que «multiplica per 6» (de fet, aquest calidoscopi coincideix amb el calidoscopi regular del cub). Està format per quatre miralls (o plans de simetria) que dos a dos formen angles dièdrics de 120°. Podem veure que la seva secció horitzontal és un quadrat. Si posem una aresta horitzontalment entre els dos díedres oposats veurem que s'ajunten tres triangles a cada vèrtex i es forma un **tetràedre regular**.

En aquest calidoscopi, posant-hi les peces adequades que estan a disposició del visitant de l'exposició, hi podrem veure: el tetràedre regular, el tetràedre escapçat, l'octàedre, l'octàedre escapçat, el cub, el cub escapçat i el cuboctàedre.

En la foto es poden veure dos tetràedres escapçats a partir de les peces de l'esquerra situades en un calidoscopi 3-3-3-3.

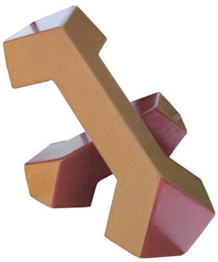


Figura 8

Calidoscopi (**) 3-4-3-4. Format per la unió de quatre calidoscopis minimals cuboctaèdrics (1/48), per la qual cosa serà un calidoscopi que «multiplica per 12». Està format per quatre miralls (o plans de simetria) amb dos dels angles dièdrics oposats de 120ºi els altres dos de 90º. Si posem l'aresta com abans veurem o bé quatre triangles que s'ajunten en un vèrtex, l'**octàedre**, o amb l'altra diagonal tres quadrats units en un vèrtex que ens donarà el **cub**. Podem veure que la seva secció perpendicular a l'eix del calidoscopi és un rombe de raó entre les diagonals arrel de 2. Aquest rombe situat en el calidoscopi ens permetrà observar un **dodecàedre ròmbic**.

Amb aquest calidoscopi també podrem veure l'octàedre escapçat, el cuboctàedre, el cub escapçat i els gran i petit rombicuboctàedres. En observar-los en el calidoscopi, s'entén el complicat nom d'aquests darrers políedres: es veu com 12 quadrats provenen del dodecàedre ròmbic, els triangles o hexàgons de l'octàedre, i els 6 quadrats o octògons del cub.

Aquests calidoscopis faciliten molt el comptatge de cares, arestes i vèrtexs: per exemple, en el cas del gran rombicuboctàedre, veiem que la peça que el genera conté 4 vèrtexs, 4 arestes senceres (d'un quadrat) i 4 mitges arestes (dels octògons). En total són 6 arestes que cal multiplicar per 12. Aquest políedre té, doncs, 72 arestes i $4 * 12 = 48$ vèrtexs. Les cares són les 12 que provenien del dodecàedre ròmbic més les 6 provinents del cub més les 8 hereves de l'octàedre: en total 26. Comprovem la fórmula d'Euler: $26 + 48 - 72 = 2$.

En la foto es pot veure un cuboctàedre a partir de la peça de l'esquerra situada en un calidoscopi 3-4-3-4.

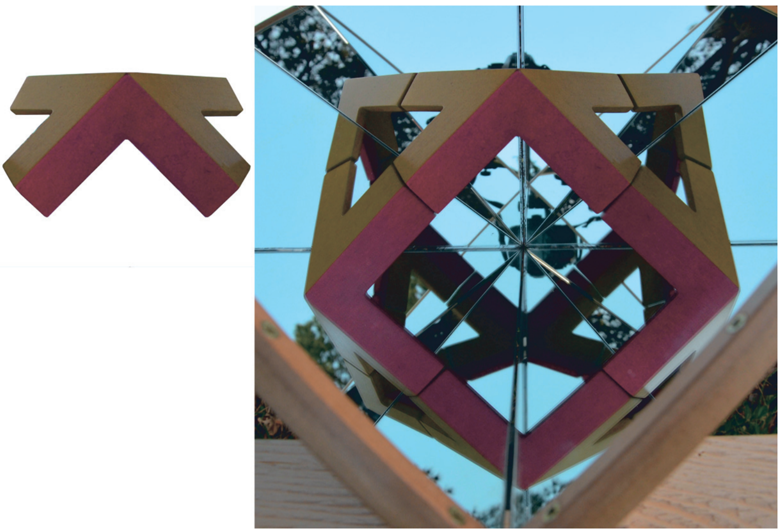


Figura 9

Calidoscopi (***) 3-5-3-5. Format per la unió de quatre calidoscopis minimals icosidodecaèdrics (1/120), per la qual cosa serà un calidoscopi que «multiplica per 30». Està format per quatre miralls (o plans de simetria) amb dos dels angles dièdrics oposats de 120ºi els altres dos de 72°. Si fem el mateix d'abans tindrem o bé tres pentàgons en un vèrtex i veurem el **dodecàedre** o cinc triangles si usem l'altra diagonal i veurem un **icosàedre**. La secció perpendicular a l'eix central del calidoscopi és un rombe la diagonal curta del qual ens donaria el dodecàedre i la llarga l'icosàedre. La figura global que es forma és el **triacontàedre ròmbic**, que té tantes cares (30) com arestes tenen el dodecàedre i l'icosàedre.

Amb aquest calidoscopi també podrem veure el dodecàedre escapçat, l'icosidodecàedre, l'icosàedre escapçat i els gran i petit rombicosidodecàedres.

En la foto es pot veure el gran rombicosidodecàedre a partir de la peça de l'esquerra situada en un calidoscopi 3-5-3-5.

Figura 10

Com hem vist, en els diversos calidoscopis que hem comentat s'hi poden veure els políedres regulars i molts dels políedres arquimedians. De fet, els calidoscopis ròmbics poden ser útils per donar a conèixer aquests políedres, que sorgeixen de manera natural en escapçar successivament els políedres regulars. Els únics políedres arquimedians que no es poden generar en els calidoscopi són el cub rom i el dodecàedre rom (o xatos), perquè no tenen plans de simetria. Els duals dels políedres arquimedians (que són els políedres de Catalan) també podríem veure'ls en aquests calidoscopis amb les peces adequades (de fet, el dodecàedre ròmbic i el triacontàedre ròmbic que són políedres de Catalan ja hem vist que apareixien entre les imatges dels calidoscopis ròmbics).

Políedres al catadiòptric

Tornem a fixar-nos en el calidoscopi octaèdric (o catadiòptric), que té la característica d'estar format pels tres plans d'un sistema de coordenades rectangular. Tots els políedres que tinguin aquests plans de simetria es podran visualitzar en aquest calidoscopi. Al començament d'aquest article ja hem parlat de l'octàedre escapçat, que es genera amb la seva vuitena part (i la «màgia» dels miralls).

Per exemple, només observant aquestes imatges

Figura 11

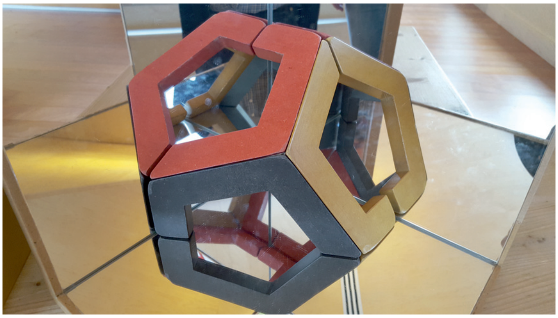


Figura 12

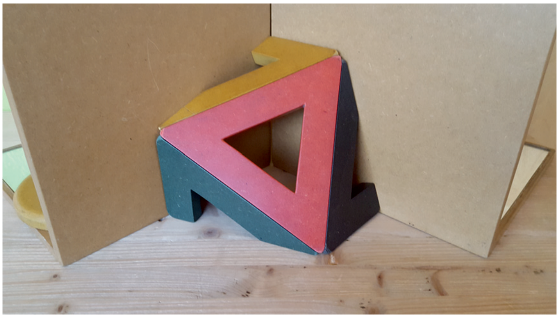


Figura 13

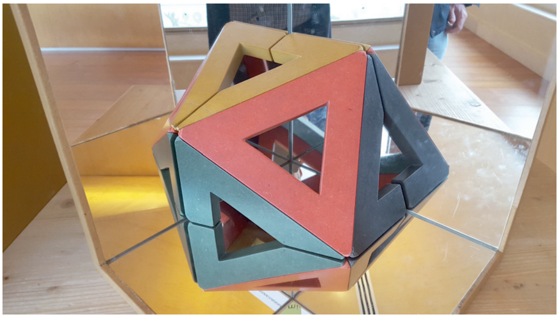


Figura 14

«veiem» com el dodecàedre i l'icosàedre es generen en el catadiòptric a partir de la seva «traça» en el primer quadrant de l'espai.

Els calidoscopis dèltics

Podríem citar també els calidoscopis dèltics: es tracta d'ajuntar dos calidoscopis minimals per la seva «hipotenusa» (la cara oposada a l'angle dièdric recte), amb la qual cosa es formaran el calidoscopi 3-4-3-4 (aquest coincideix amb el segon dels calidoscopis ròmbics), el 3-4-4-4 i el 3-4-5-4.

Calidoscopi 3-4-4-4. És la unió de dos minimals cuboctaèdrics (1/48) Per tant, «multiplicarà per 24». Una diagonal ens donarà el dodecàedre ròmbic i l'altra el seu dual: el cuboctàedre.

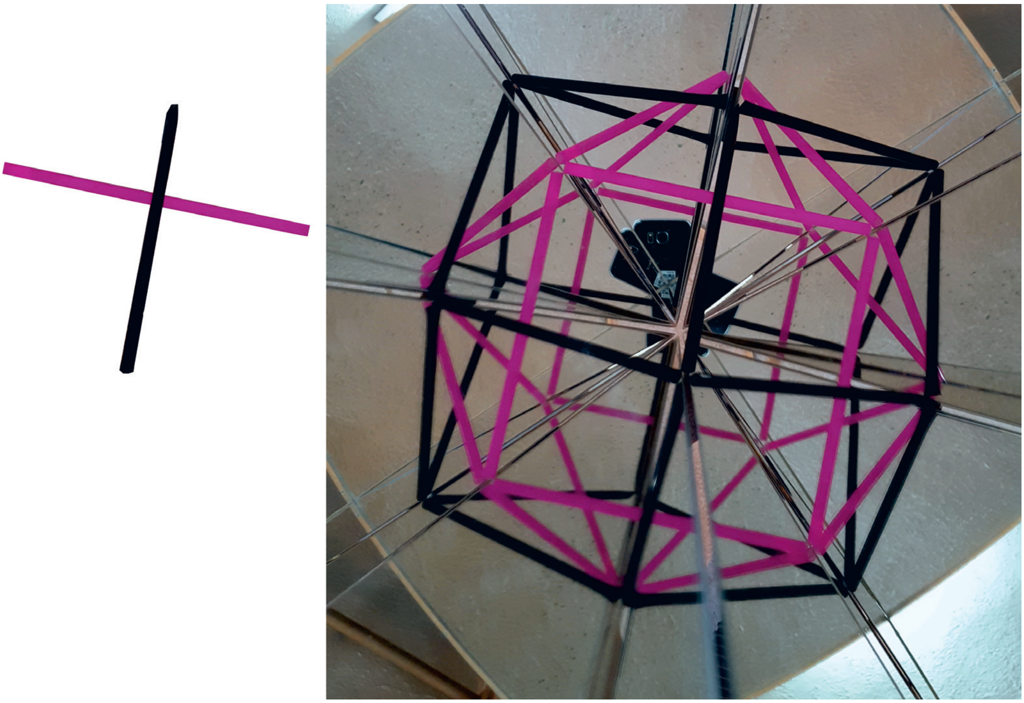
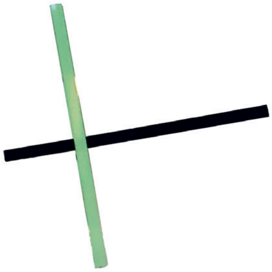


Figura 15

Calidoscopi 3-4-5-4. És la unió de dos minimals icosidodecaèdrics (1/120). Multiplica per 60. Una diagonal ens permet veure el triacontàedre ròmbic i l'altra el seu dual: l'icosidodecàedre.



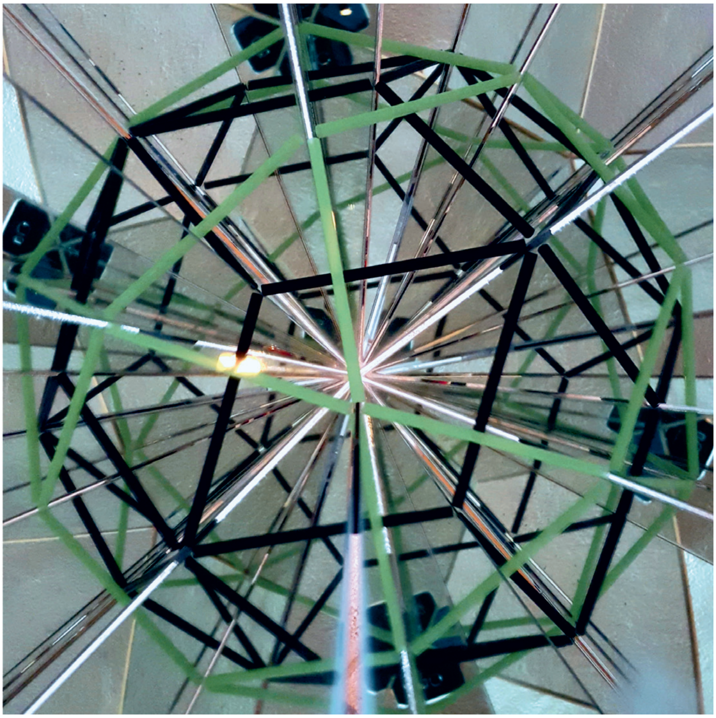


Figura 16

Els calidoscopis de l'exposició del mmaca es poden gaudir a diferents nivells segons les capacitats o els coneixements dels visitants. Per als més joves, el fet de posar les peces en el calidoscopi i veure la forma que s'obté ja és prou impactant. Pot plantejar-se reconèixer el políedre format en les imatges o les formes exposades. En un segon nivell pot ser d'interès analitzar les formes que s'obtenen segons l'angle dels díedres formats pels miralls i veure com els políedres que s'obtenen en cada calidoscopi comparteixen els plans de simetria. En tot cas, es tracta d'uns mòduls que permeten compartir emocions i converses sobre geometria i sobre la bellesa de les formes que els miralls ens retornen.

Bibliografia

Coxeter, H.S.M. (1973). *Regular polytopes*. Dover.

Cundy, H.M., Rollet, A.P. (1961). *Mathematical Models*. Oxford UP.

Guillén Soler, G. (1991). *El mundo de los poliedros*. Síntesis.

Wenninger, M. (1966). *Polyhedron models for the classroom*. NTCM.

Wenninger, M. (1971). *Polyhedron models*. Cambridge UP.

Wenninger, M. (1979). *Spherical models*. Cambridge UP.